1) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>. Αν $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ & $\nu \in \mathbb{N}$, τοτε υπαρχει μοναδικος $x \in \mathbb{R}_0^+$ τετοιος ώστε $x^\nu = \alpha$

<u>ΛΗΜΜΑ</u>

Αν $\nu \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$, τότε $(1+\varepsilon)^\nu < 1 + 3^\nu \varepsilon$

<u>Αποδ</u>

Έστω $X = \{\nu \in \mathbb{N} \ (1+\varepsilon)^\nu < 1 + 3^\nu \varepsilon\}$

Ισχύει: $1 \in X$ Πραγματικά, $(1+\varepsilon)^1 < 1 + 3^1 \varepsilon = 1 + 3\varepsilon \to 1+\varepsilon < 1+3\varepsilon$

Έστω $\nu \in X$. Τότε $(1+\varepsilon)^\nu < 1 + 3^\nu \varepsilon \Rightarrow (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^\nu < (1+\varepsilon)(1+3^\nu \varepsilon)$

$$\Rightarrow \underline{(1+\varepsilon)^{\nu+1}} < 1 + \underline{3^\nu \varepsilon + \varepsilon + 3^\nu \cdot \varepsilon^2} = 1 + (1 + 3^\nu + 3^\nu \varepsilon) \cdot \varepsilon <$$
$$< 1 + (3^\nu + 3^\nu + 3^\nu)\varepsilon = 1 + 3 \cdot 3^\nu \cdot \varepsilon = \underline{1 + 3^{\nu+1} \cdot \varepsilon}$$

Άρα $(1+\varepsilon)^{\nu+1} < 1 + 3^{\nu+1} \cdot \varepsilon$

Άρα $\nu + 1 \in X$

και άρα X επαγωγικό $\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$
Όμως $X \subseteq \mathbb{N}$ $\Rightarrow X = \mathbb{N}$

<u>ΠΡΟΤ</u> Έστω $P(\cdot)$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $P(1)$ αληθής.
$(\forall x)$ $P(x)$ αληθής $\Rightarrow P(x+1)$ αληθής.
ΝΔ.ο η πρόταση $P(x)$ είναι αληθής για καθε $x \in \mathbb{N}$

Θεωρώ $X = \{\nu \in \mathbb{N} : P(\nu) \text{ αληθής}\}$

$P(1)$ αληθής $\Longrightarrow 1 \in X$

Έστω $x \in X \to P(x)$ αληθής $\xRightarrow{\text{υπόθεση}} P(x+1)$ αληθής

$\to x+1 \in \mathbb{N}$ | X επαγωγικό $\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$
Όμως $X \subseteq \mathbb{N}$ $\Rightarrow X = \mathbb{N}$

Απόδειξη του Θεωρήματος (Ι):

Αν $\alpha = 0$ τότε $x = 0$. Έστω $\alpha > 0$

Έστω $S = \{ t \in \mathbb{R}^+ : t^\nu < \alpha \}$

Παρατηρώ $\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\nu \leq \frac{\alpha}{\alpha+1} < \alpha \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\nu < \alpha \Rightarrow$

Άρα $\frac{\alpha}{\alpha+1} \in S \neq \emptyset$

$t \in S$:
- $t < 1 \Rightarrow t < \alpha + 1$
- $t \geq 1 \Rightarrow t \leq t^\nu < \alpha < \alpha + 1$

, $\alpha+1$ άνω φράγμα του S

Από το $(A_{12}) \Rightarrow \exists \sup S = x \quad \left(x \geq \frac{\alpha}{\alpha+1} > 0 \right)$

Θ.δ.ο $x^\nu = \alpha$

Έστω $x^\nu < \alpha$ διαλέγω ε, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \frac{\alpha - x^\nu}{(3x)^\nu}$ $(**)$

$x^\nu (1+\varepsilon)^\nu \overset{(*)}{<} x^\nu (1 + 3^\nu \cdot \varepsilon) = x^\nu + (3x)^\nu \varepsilon \overset{(**)}{<} \alpha$ $\quad (1+\varepsilon)^\nu < 1 + 3^\nu \varepsilon \ (*)$

$(x(1+\varepsilon))^\nu < \alpha \Longrightarrow x(1+\varepsilon) \in S \Rightarrow$

$\underset{x = \sup S}{\Rightarrow} x(1+\varepsilon) \leq x \Rightarrow 1 + \varepsilon < 1$ άτοπο για $\varepsilon > 0$

Έστω $x^\nu > \alpha$ διαλέγω ε, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \frac{x^\nu - \alpha}{3^\nu \alpha} \Rightarrow$

$\alpha < \frac{x^\nu}{1 + 3^\nu \varepsilon} \overset{(*)}{<} \frac{x^\nu}{(1+\varepsilon)^\nu} = \left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right)^\nu$

Όμως: $\frac{x}{1+\varepsilon} < x = \sup S$

Άρα υπάρχει $t \in S$

$\frac{x}{1+\varepsilon} < t < x$ Άρα $\alpha < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{\nu} < t^{\nu}$

$$\downarrow$$

$\alpha < t^{\nu} \rightarrow t \notin S$ άτοπο

Άρα $x^{\nu} = \alpha$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Έστω $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ $\beta \in \mathbb{N}$ και ΜΚΔ$(\alpha, \beta) = 1$

$$2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$2\beta^2 = \alpha^2$ Άρα 2 διαιρεί τον $\alpha^2 \overset{(?)}{\Rightarrow}$ 2 διαιρεί τον α

Τότε $\alpha = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$ τότε.

$2\beta^2 = (2\lambda)^2 \Rightarrow 2\beta^2 = 4\lambda^2 \Rightarrow \beta^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow$

2 διαιρεί τον $\beta^2 \Rightarrow$ 2 διαιρεί τον β

Άτοπο!

(?) Έστω: 2 δεν διαιρεί τον α τότε $\alpha = 2\kappa + 1 \Rightarrow$

$\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 =$

$= 2(\underbrace{2\kappa^2 + 2\kappa}_{t}) + 1$

$= 2t + 1$, $t \in \mathbb{N}$

άτοπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ας είναι $c_1, c_2, \dots, c_n$ ακέραιοι. Τότε οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n = 0$$

είναι ακέραιοι ή άρρητοι.

Έστω $x = \frac{\alpha}{b}$ είναι ρίζα, με $\alpha \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $ΜΚΔ(\alpha, b) = 1$, $b > 1$

$$\alpha^n = -b\left(c_1 \alpha^{n-1} + c_2 \alpha^{n-2} b + \dots + c_{n-1} \alpha b^{n-2} + c_n b^{n-1}\right)$$

Άρα b διαιρεί το α^n

ΘΕΩΡ: Αν α, β είναι τυχόντες εν $\mathbb{R}$ $\alpha < \beta$, τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ κ' $s \in \mathbb{Q}^c$, με:

$$\alpha < q < \beta \quad \text{κ'} \quad \alpha < s < \beta$$

Αποδ:

$$\beta > \alpha \Rightarrow \beta - \alpha > 0$$

$(\exists n \in \mathbb{N})$ $\cancel{\frac{1}{\beta-\alpha}}$ $n > \frac{1}{\beta - \alpha} \Rightarrow \beta - \alpha > \frac{1}{n}$

Έστω $m \in \mathbb{Z}$: $\underline{m < n\beta \leq m+1}$

$$\alpha < \beta - \frac{1}{n} \leq \frac{m+1}{n} - \frac{1}{n} < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{m}{n} < \beta$$

$\in \mathbb{Q}$

$(\exists k \in \mathbb{N})$ $k > \frac{\sqrt{2}}{\beta - \frac{m}{n}}$ $\rightarrow$ $\beta > \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{k}$

$$\beta > \frac{m}{k} + \frac{\sqrt{2}}{k} > \frac{m}{n} > \alpha$$

s

Αποδ. του γιατί είναι άρρητος.

έστω $\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{k} = d \in \mathbb{Q}$

$\frac{\sqrt{2}}{k} = d - \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2} = \underbrace{\left(d - \frac{m}{k}\right)}_{\text{ρητός - ρητό = ρητό}} \cdot k$

Άρα $\sqrt{2}$ ρητος άτοπο.